İki Boyutlu Rastgele Değişkenler

Tanım. (Ω, U) ölçülebilir uzay, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ve $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ ise bu uzayda tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer bu fonksiyonlar $\forall(x, y) \in \mathbb{R}$ için,

$$\{\omega: X(\omega) < x, Y(\omega) < y\} \in \mathrm{U}$$

koşulunu sağlarsa (X, Y) çiftine iki boyutlu rastgele değişken denir. $\mathbb{R}^2$ iki boyutlu reel düzlemi göstermek üzere (X, Y)'nin tanım kümesi

$$D_{XY} = \{(x, y): \omega \in \Omega \text{ ve } X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}$$

olarak verilir. X ve Y rastgele değişkenlerinin her ikisi de ayrı ayrı kesikli ise (X, Y) kesikli iki boyutlu rastgele değişken, her ikisi de ayrı ayrı sürekli ise (X, Y) sürekli iki boyutlu rastgele değişken olarak adlandırılır. Eğer X ve Y rastgele değişkenlerinin birisi kesikli diğeri sürekli ise o zaman (X, Y) karma (mixed) iki boyutlu rastgele değişken olarak adlandırılır.

Buna göre (Ω, U, P) olasılık uzayında $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $Y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ rastgele değişkenler ise $X \mp Y$, XY, $X < Y$, $X > Y$, $X \neq Y$, $max\{X, Y\}$, $min\{X, Y\}$ fonksiyonları da birer rastgele değişkendir. (Shahbazov, 2005).

Örnek: İki hilesiz madeni para havaya atıldığında X rastgele değişkeni turaların sayısını, Y rastgele değişkeni de yazıların sayısını göstermek üzere X ve Y rastgele değişkenlerinin ayrı ayrı ve ortak tanım kümelerini oluşturunuz.

$$D_X = \{\ 0,1,2\ \}, \qquad D_Y = \{\ 0,1,2\ \}, \qquad D_{XY} = \{(2,0),(1,1),(0,2)\}$$

Ortak Dağılım Fonksiyonu

Tanım. X ve Y, (Ω, U, P) olasılık uzayında tanımlı iki rastgele değişken olmak üzere

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y); \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ için}$$

fonksiyonuna (X, Y)'nin iki boyutlu dağılım fonksiyonu veya X ve Y'nin ortak dağılım fonksiyonu denir. Ortak dağılım fonksiyonu, $F_{XY}(x, y)$ veya $F(x, y)$ ile gösterilir.

$A_1 = \{w \in \Omega: X(w) \leq x\}$ ve $A_2 = \{w \in \Omega: Y(w) \leq y\}$ olayları verildiğinde, bunların arakesiti olan $(A_1 \cap A_2)$, $(X \leq x,\ Y \leq y)$ olayına denktir

$$P(A_1) = F(x), \qquad P(A_2) = F(y)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = F(x, y)$$

Tanım. x ve y' nin her değeri için

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

ise X ve Y rastgele değişkenleri bağımsızdır denir.

Ortak Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

İki rastgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu, tek değişkenli dağılım fonksiyonuna benzer birçok özelliğe sahiptir.

1) $0 \leq F_{X,Y}(x, y) \leq 1$

2) Eğer $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise,

$$F_{X,Y}(x_1, y_1) \leq F_{X,Y}(x_2, y_1) \leq F_{X,Y}(x_2, y_2)$$
$$F_{X,Y}(x_1, y_1) \leq F_{X,Y}(x_1, y_2) \leq F_{X,Y}(x_2, y_2)$$

3)

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$$

$$\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$$

4) $P(x_1 < X \leq x_2,\ Y \leq y) = F_{X,Y}(x_2, y) - F_{X,Y}(x_1, y)$

$P(X \leq x, y_1 < Y \leq y_2) = F_{X,Y}(x, y_2) - F_{X,Y}(x, y_1)$

5) Eğer $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise,

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) + F_{X,Y}(x_1, y_1) \geq 0$$

Marjinal Dağılım Fonksiyonları

$F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ sırasıyla X ve Y rastgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları olup aşağıdaki gibi veriliyor:

$$F_X(x) = \lim_{\mathrm{y}\to\infty} F_{X,Y}(x, \mathrm{y}) = F(x, \infty)$$

$$F_Y(y) = \lim_{\mathrm{x}\to\infty} F_{X,Y}(x, \mathrm{y}) = F(\infty, y)$$

Örnek: (X, Y) iki boyutlu rastgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha_1 x})(1 - \mathrm{e}^{-\alpha_2 y}) & , \quad x > 0,\ \ y > 0;\ \ \alpha_1,\ \alpha_2 > 0 \\ 0 & , \quad \mathrm{d.d.} \end{cases}$$

olarak veriliyor. Buna göre;

a) X ve Y rastgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz.

b) X ve Y rastgele değişkenleri bağımsız mıdır?

c) $P(X \leq 2, Y \leq 1)$ ve $P(Y > 5)$ olasılıklarını hesaplayınız.

***Çözüm*.**

a) X rastgele değişkeninin marjinal dağılım fonksiyonu

$$F_X(x) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha_1 x}) & , \quad x > 0;\ \ \alpha_1 > 0 \\ 0 & , \quad \mathrm{d.d.} \end{cases}$$

ve Y rastgele değişkeninin marjinal dağılım fonksiyonu

$$F_Y(y) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha_2 y}) & , \quad y > 0;\ \alpha_2 > 0 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

olur.

b) $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ olduğundan X ve Y rastgele değişkenleri bağımsızdır.

c) $P(X \leq 2,\ Y \leq 1) = F_{X,Y}(2, 1) = (1 - e^{-2\alpha_1})(1 - e^{-\alpha_2})$

$P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - F_Y(5) = 1 - (1 - e^{-5\alpha_2}) = e^{-5\alpha_2}$

Örnek 6.4: (X, Y) iki boyutlu kesikli rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+1)(y+1)(2y+1)}{41.420^2} & , \quad x, y = 1, 2, \dots, 20 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

olmak üzere.

a) X ve Y bağımsız mıdır?

b) $P(X \geq 10,\ Y \leq 5)$; $P(X < 10,\ Y > 5)$; $P(4 \leq X \leq 9,\ 5 < Y < 13)$ ve $P(X \geq 15)$ ve $P(Y < 13)$ olasılıklarını hesaplayınız.

Çözüm.

a)

$$F_X(x) = \lim_{y \to 20} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, 20)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 20 \\ \dfrac{x(x+1)}{420} & , \quad x = 1, 2, \dots, 20 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

eşitliğinden,

$$F_Y(y) = \lim_{x \to 20} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(20, y)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 & , \quad y \geq 20 \\ \dfrac{y(y+1)(2y+1)}{17220} & , \quad y = 1, 2, \dots, 20 \\ 0 & , \quad y < 1 \end{cases}$$

bulunur. $F(x, y) = F(x)F(y)$ olduğundan, X ve Y rastgele değişkenleri bağımsızdır.

b) Ortak Dağılım fonksiyonunu 4.özelliğinden,

$$\begin{aligned} P(X \geq 10,\ Y \leq 5) &= P(9 < X \leq 20,\ Y \leq 5) \\ &= F_{X,Y}(20, 5) - F_{X,Y}(9, 5) \\ &= 0{,}0192 - 0{,}0041 = 0{,}0151 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(X < 10,\ \ Y > 5) &= P(X \leq 9,\ \ 5 < Y \leq 20) \\
&= F_{X,Y}(9,20) - F_{X,Y}(9,5) \\
&= 0{,}2143 - 0{,}0041 = 0{,}2102
\end{aligned}
$$

Ortak Dağılım fonksiyonunu 5.özelliğinden,

$$
\begin{aligned}
P(4 \leq X \leq 9,\ \ 5 < Y < 13) &= P(3 < X \leq 9,\ \ 5 < Y \leq 12) \\
&= F_{X,Y}(9{,}12) - F_{X,Y}(3{,}12) - F_{X,Y}(9{,}5) + F_{X,Y}(3{,}5) \\
&= 0{,}04853 - 0{,}00647 - 0{,}0041 + 0{,}000547 \\
&= 0{,}0385
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 15) &= 1 - P(X < 15) \\
&= 1 - P(X \leq 14) = 1 - F_X(14) \\
&= 1 - 0.25 = 0.75
\end{aligned}
$$

$$P(Y \leq 13) = F_Y(13) = 0.18777$$

Ortak Olasılık Fonksiyonu

Tanım 6.4. (X, Y) iki boyutlu kesikli rastgele değişken ve bunların belli (x, y) değerlerini alması olasılığı

$$P_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y) \tag{6.7}$$

ile gösterilir. Bu olasılığa (X, Y) iki boyutlu rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu veya X ve Y rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu denir.

Ortak Olasılık Fonksiyonun Özellikleri

1) $0 \leq P_{X,Y}(x, y) \leq 1$

2)

$$\sum_{D_X} \sum_{D_Y} P_{X,Y}(x, y) = 1$$

3) $(X, Y) \in A$ için,

$$P(A) = \sum_{(x,y) \in D_A} \sum P_{X,Y}(x, y)$$

Buradaki toplam A olayının D_A tanım kümesindeki (x, y) noktaları üzerinden alınmıştır.

4) (X, Y) iki boyutlu rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} P_{X,Y}(u, v)$$

olarak verilir.

Marjinal Olasılık Fonksiyonları

X rastgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = P_X(x) = \sum_{D_Y} P_{X,Y}(x, y)$$

Y rastgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonu da

$$P(Y = y) = P_X(y) = \sum_{D_X} P_{X,Y}(x, y)$$

Buradaki D_X ve D_Y sırasıyla X ve Y rastgele değişkenlerinin tanım kümeleridir. Eğer X ve Y bağımsız rastgele değişkenler ise,

$$P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$$

dir.

Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım. (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, X ve Y bu uzayda tanımlı iki sürekli rastgele değişken, $F_{X,Y}(x, y)$'de X ve Y'nin ortak dağılım fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Fonksiyonuna (X, Y)'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X,Y}(x, y)$ olarak gösterilir.

$f_{X,Y}(x, y)$'nin Özellikleri

1) $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$

2)

$$\int_{D_y} \int_{D_X} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = 1$$

3) $(X, Y) \in A$ verildiğinde,

$$P(A) = \iint_{D_A} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy$$

Buradaki integral A olayının D_A tanım kümesi üzerinde alınıyor.

4)

$$P(x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy$$

5)

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\, dv\, du$$

Bu özellik (X,Y)'nin ortak dağılım fonksiyonudur.

Marjinal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

X rastgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

veya

$$f_X(x) = \int_{D_y} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

olarak verilir.

Y rastgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu da benzer olarak,

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

veya,

$$f_Y(y) = \int_{D_X} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

dır. X ve Y bağımsız sürekli rastgele değişkenler ise,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

olarak yazılır.

Örnek 6.6: (X,Y) iki boyutlu rastgele değişkenin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & , \quad 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

olarak veriliyor ise,

a) k sabitini bulunuz.

b) Ortak dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) Y rastgele değişkenin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

d) X rastgele değişkenin dağılım fonksiyonunu bulunuz.

e) $P(X \le 1/3,\ \ Y > 1/2),\ \ P(X \le 1/3),$

$P(X+Y \le 1/4)$, $P(X \le 1/3 \,|\, Y > 1/2)$ olasılıklarını bulunuz.

f) X ve Y rastgele değişkenleri bağımsız mıdır?

***Çözüm*.a)** $f_{X,Y}(x,y)$'nin 2. özelliğinden,

$$\int_0^1 \int_0^1 k\,dx\,dy = 1$$

olduğundan $k = 1$ bulunur.

b) Dağılım fonksiyonunun özelliklerinden,

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ veya } y < 0 \\ xy, & 0 \le x < 1, \quad 0 \le y < 1 \\ x, & 0 \le x < 1, y \ge 1 \\ y, & x \ge 1, \ 0 \le y < 1 \\ 1, & x \ge 1, \quad y \ge 1 \end{cases}$$

bulunur.

c)

$$f_Y(y) = \int_0^1 1dx = 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

d)

$$f_X(x) = \int_0^1 1dy = 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_0^x f_X(x)dx = x$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \ge 1 \\ x & , \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

e)

$$P(X \le 1/3, Y > 1/2) = \int_0^{1/3} \int_{1/2}^{1} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_0^{1/3} \int_{1/2}^{1} 1dydx = \frac{1}{6}$$

$$P(X \leq 1/3) = \int_0^{1/3} f_X(x)dx = \int_0^{1/3} 1dx = \frac{1}{3}$$

$$P(X \leq 1/3 \,|\, Y > 1/2) = P(X \leq 1/3, Y > 1/2)/P(Y > 1/2)$$

$$P(X \leq 1/3, Y > 1/2) = \frac{1}{6}$$

ve

$$P(Y > 1/2) = \int_{1/2}^{1} f_Y(y)dy = \frac{1}{2}$$

olduğundan,

$$P(X \leq 1/3 \,|\, Y > 1/2) = \frac{1}{3}$$

olur.

$$P\left(X + Y \leq \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} \int_0^{(1/4-y)} f(x,y)dxdy = \int_0^{1/4} \int_0^{(1/4-y)} 1dxdy = \frac{1}{32}$$

f) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ olduğundan X ve Y rastgele değişkenleri bağımsızdır.

Kaynak ders kitabı: Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 4. Baskı, Seçkin Yayınevi.